Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Appello completo – 11 Gennaio 2024*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 15 minuti.*

Questionario (27 punti)

(☐ domanda a risposta multipla, ◯ domanda a risposta singola)

1. (3 punti) La funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

- 1 è continua in $(0,0)$
- 2 è derivabile in $(0,0)$
- 3 è derivabile in $(0,0)$ lungo ogni versore $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$
- 4 è differenziabile in $(0,0)$
- 5 è di classe $\mathcal{C}^1$ su $\mathbb{R}^2$
- 6 ammette $(0,0)$ come punto critico

---

2. (3 punti) Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y)=x^2\mathrm{e}^x+y^2\mathrm{e}^{-y}$. Determinare i punti critici di f e stabilirne la natura.

$(0,0)$: punto di minimo; $(0,2)$ e $(-2,0)$: punti di sella; $(-2,2)$: punto di massimo

---

3. (3 punti) L'area della superficie

$$\Sigma:\begin{cases}x=u\cos v\\ y=u\sin v\\ z=u\end{cases}\qquad (u,v)\in\Omega\,,$$

dove $\Omega=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\ :\ u^2+v^2<2\,,\ u>0\}$, è

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 1/2 ⑤ 2/3 ⑥ 3/2 ⑦ 3/8 ⑧ 8/3

---

4. (4 punti) Il valore assoluto del lavoro del campo $\mathbf{F}=(3y+z,x-z,3x+y)$ lungo la curva

$$\gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2-4x+2z=0\\ x+2y+2z=0\end{cases}$$

è $|L_\gamma(\mathbf{F})|=10\,\pi$

---

5. (4 punti) Sia $a\in\mathbb{R}$, $a>0$. Determinare il valore del parametro a in modo che il flusso del campo $\mathbf{F}=(x^2\sin y,2x\cos y,x^2+y^2+z^2)$ attraverso la superficie $\Sigma=\partial Q$ data dal bordo del cubo $Q=[0,a]\times[0,a]\times[0,a]$, orientata positivamente, sia $\Phi_\Sigma(\mathbf{F})=4$.

$a=\sqrt{2}$

---

6. (3 punti) Il raggio di convergenza della serie reale $\displaystyle\sum_{n\geq0}\frac{2^n n!}{n^n}\,x^n$ è

① 0 ② 1 ③ 2 ④ e ⑤ e/2 ⑥ 2/e ⑦ 2e ⑧ $+\infty$

---

7. (3 punti) Sia f la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{2}(1+y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e sia I l'intervallo massimale su cui f è definita. Sia $f(x) = F(x) + o(x^2)$ per $x \to 0$. Allora

1 f è strettamente crescente	5 $F(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2$	9 $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
2 f è strettamente decrescente	6 $F(x) = 1 + \frac{1}{2}x + x^2$	10 $I = \left(-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right)$
3 f non è monotona	7 $F(x) = 1 + \frac{1}{2}x - x^2$	11 $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$
4 $F(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$	8 $I = \mathbb{R}$	

---

8. (4 punti) Sia $I = \displaystyle\int_\gamma \frac{z e^{\frac{\pi}{3} z}}{z^2 + 9}\, dz$, dove γ è la curva $|z - 4| = 6$, orientata positivamente. Allora

(1) 0 (2) 1 (3) 2π (4) -2π (5) $2i$ (6) $-2i$ (7) $2\pi i$ (8) $-2\pi i$

Domande teoriche (6 punti)

1. (1.5 punti) Definire i versori della terna intrinseca di una curva biregolare.

2. (1.5 punti) Enunciare il teorema di esistenza e unicità della soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del secondo ordine.

3. (3 punti) Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.

1 f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $\mathbb{C}$	8 $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ per ogni curva chiusa γ
2 f è una funzione intera	9 $\int_\gamma f(z^2 e^z)\, dz = 0$ per ogni curva chiusa γ
3 se f è limitata, allora f è costante	10 $\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2+1}\, dz = 0$ per ogni curva chiusa γ
4 f non può essere limitata	11 $\mathrm{Res}(f(z), z_0) = 0$ per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$
5 $\mathrm{Re}\, f(z)$ è una funzione armonica	12 $\mathrm{Res}(f(z), z_0) = 2\pi i$ per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$
6 $\lvert f(z)\rvert$ è una funzione armonica	13 f è sviluppabile in serie di Taylor in ogni punto $z_0 \in \mathbb{C}$
7 l'equazione $f(z) = 0$ ammette sempre almeno una soluzione	