Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — *Secondo compito in itinere – 11 Gennaio 2024*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora.*

Questionario (26 punti)

(☐ domanda a risposta multipla, ◯ domanda a risposta singola)

1. (3 punti) Determinare il valore del parametro reale a in modo che il campo $\mathbf{F} = \left(\dfrac{axy^2}{1+x^2y^2}, \dfrac{x^2y}{1+x^2y^2} \right)$ sia conservativo.

   $a = 1$

---

2. (4 punti) L'area della superficie

$$\Sigma : \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = u \end{cases} \qquad (u,v) \in \Omega\,,$$

   dove $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;:\; u^2+v^2<2\,,\; u>0\}$, è

   ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 1/2 ⑤ 2/3 ⑥ 3/2 ⑦ 3/8 ⑧ ✓ 8/3

---

3. (4 punti) Il valore assoluto del lavoro del campo $\mathbf{F} = (3y+z, x-z, 3x+y)$ lungo la curva

$$\gamma : \begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x+2z = 0 \\ x+2y+2z = 0 \end{cases}$$

   è $|L_\gamma(\mathbf{F})| = 10\,\pi$

---

4. (4 punti) Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Determinare il valore del parametro a in modo che il flusso del campo $\mathbf{F} = (x^2\sin y, 2x\cos y, x^2+y^2+z^2)$ attraverso la superficie $\Sigma = \partial Q$ data dal bordo del cubo $Q = [0,a]\times[0,a]\times[0,a]$, orientata positivamente, sia $\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = 4$.

   $a = \sqrt{2}$

---

5. (4 punti) Sia f la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{2}(1+y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   e sia I l'intervallo massimale su cui f è definita. Sia $f(x) = F(x) + o(x^2)$ per $x \to 0$. Allora

   - [x] 1 f è strettamente crescente
   - [ ] 2 f è strettamente decrescente
   - [ ] 3 f non è monotona
   - [x] 4 $F(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$
   - [ ] 5 $F(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2$
   - [ ] 6 $F(x) = 1 + \frac{1}{2}x + x^2$
   - [ ] 7 $F(x) = 1 + \frac{1}{2}x - x^2$
   - [ ] 8 $I = \mathbb{R}$
   - [ ] 9 $I = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$
   - [x] 10 $I = \left(-\dfrac{3}{2}\pi, \dfrac{\pi}{2}\right)$
   - [ ] 11 $I = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi\right)$

---

6. (3 punti) Il raggio di convergenza della serie reale $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n n!}{n^n}\, x^n$ è

① 0 ② 1 ③ 2 ④ e ⑤ e/2 ⑥ 2/e ⑦ 2e ⑧ $+\infty$

---

7. (4 punti) Sia $I = \displaystyle\int_\gamma \frac{z\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}z}}{z^2+9}\,\mathrm{d}z$, dove γ è la curva $|z-4| = 6$, orientata positivamente. Allora

① 0 ② 1 ③ 2π ④ -2π ⑤ $2\mathrm{i}$ ⑥ $-2\mathrm{i}$ ⑦ $2\pi\mathrm{i}$ ⑧ $-2\pi\mathrm{i}$

Domande teoriche (7 punti)

1. (2 punti) Enunciare il teorema di Gauss-Green nel piano.

2. (2 punti) Enunciare il teorema di esistenza e unicità della soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del secondo ordine.

3. (3 punti) Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.

- [1] f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $\mathbb{C}$
- [2] f è una funzione intera
- [3] se f è limitata, allora f è costante
- [4] f non può essere limitata
- [5] $\operatorname{Re} f(z)$ è una funzione armonica
- [6] $|f(z)|$ è una funzione armonica
- [7] l'equazione $f(z) = 0$ ammette sempre almeno una soluzione
- [8] $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ per ogni curva chiusa γ
- [9] $\int_\gamma f(z^2\mathrm{e}^z)\,\mathrm{d}z = 0$ per ogni curva chiusa γ
- [10] $\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 0$ per ogni curva chiusa γ
- [11] $\operatorname{Res}(f(z), z_0) = 0$ per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$
- [12] $\operatorname{Res}(f(z), z_0) = 2\pi\mathrm{i}$ per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$
- [13] f è sviluppabile in serie di Taylor in ogni punto $z_0 \in \mathbb{C}$

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili e sia $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. Allora

- $\boxed{1}$ f continua in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f derivabile in $\mathbf{x}_0$
- $\boxed{2}$ f derivabile in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f continua in $\mathbf{x}_0$
- $\boxed{3}$ f continua in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f differenziabile in $\mathbf{x}_0$
- $\boxed{4}$ ✓ f differenziabile in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f continua in $\mathbf{x}_0$
- $\boxed{5}$ f derivabile in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f differenziabile in $\mathbf{x}_0$
- $\boxed{6}$ ✓ f differenziabile in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f derivabile in $\mathbf{x}_0$
- $\boxed{7}$ f possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f continua in $\mathbf{x}_0$
- $\boxed{8}$ f continua in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow f$ possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$
- $\boxed{9}$ ✓ f possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f derivabile in $\mathbf{x}_0$
- $\boxed{10}$ f derivabile in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow f$ possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$
- $\boxed{11}$ f possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f differenziabile in $\mathbf{x}_0$
- $\boxed{12}$ ✓ f differenziabile in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ f possiede tutte le derivate direzionali in $\mathbf{x}_0$
- $\boxed{13}$ f differenziabile in $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ f di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$
- $\boxed{14}$ ✓ f di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ $\Rightarrow$ f differenziabile in $\mathbb{R}^2$

2. Enunciare il teorema di Schwarz per le derivate miste.

3. Scrivere la massa totale e le coordinate del baricentro di una curva regolare $\gamma \in \mathbb{R}^2$ munita di densità lineare di massa δ.