Analisi Matematica II — *Primo appello – 2 Febbraio 2024*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________ **Punteggio Totale:** ____________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 15 minuti.*

Questionario (26 punti)

(☐ domanda a risposta multipla, ◯ domanda a risposta singola)

1. (2 punti) Il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\mathrm{e}^y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   ① non esiste ② vale 0 ③ vale 1 ④ vale 2 ⑤ vale 1/2

---

2. (3 punti) Data la funzione $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ e i versori $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\mathbf{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, si determini il punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ tale che $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = 3\sqrt{2}$ e $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \sqrt{2}$.

---

3. (3 punti) Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = y\,\mathrm{e}^{x^2-y^2}$ e determinarne la natura.

---

4. (3 punti) Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ e sia $\gamma = \partial\Omega$, orientata positivamente. Il lavoro $L_\gamma(\mathbf{F})$ del campo $\mathbf{F} = (y\mathrm{e}^{xy} - y^2, x\mathrm{e}^{xy} + x^2)$ lungo la curva γ è

   ① 0 ② 1 ③ -1 ④ $-2/3$ ⑤ $4/3$ ⑥ $8/3$ ⑦ $3/2$ ⑧ $-3/4$

---

5. (4 punti) Sia S la sfera di centro O e raggio $r > 0$, orientata positivamente. Sia Σ la superficie data dalla porzione di S contenuta nel primo ottante, con la medesima orientazione. Determinare il valore del raggio r in modo che il flusso del campo $\mathbf{F} = (x-y, x+y-z, y+z)$ attraverso Σ sia $\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = 4\pi$.

---

6. (4 punti) Sia f la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - x\mathrm{e}^x y(x) = 2x\mathrm{e}^x \\ y(1) = -1\,. \end{cases}$$

   Allora

   - [1] f è definita su tutto $\mathbb{R}$
   - [2] $f'(1) = \mathrm{e}$
   - [3] $f'(1) = -\mathrm{e}$
   - [4] $f'(1) = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}$
   - [5] $f''(1) = 3\mathrm{e}$
   - [6] $f''(1) = 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^2$
   - [7] $f''(1) = 2\mathrm{e} + \mathrm{e}^2$
   - [8] f possiede un punto di minimo in $x_0 = 0$
   - [9] f possiede un punto di massimo in $x_0 = 0$
   - [10] f possiede un punto di flesso in $x_0 = 0$
   - [11] f è superiormente limitata per $x \to +\infty$
   - [12] f è superiormente limitata per $x \to -\infty$

---

7. (3 punti) L'anello di convergenza della serie di Laurent $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2^n}{3^{|n|}}\, z^n$ è

① $\varnothing$ ③ $2<|z|<3$ ⑤ $2/3<|z|<6$ ⑦ $1/6<|z|<3/2$

② $\mathbb{C}$ ④ $1/3<|z|<1/2$ ⑥ $3/2<|z|<6$ ⑧ $1/6<|z|<2/3$

---

8. (4 punti) Sia $f(z) = z^5 \mathrm{e}^{-2/z^3}$ e sia $I_R = \displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$, dove γ_R è la curva di equazione $|z-1-\mathrm{i}| = R$, orientata positivamente. Allora

$\boxed{1}$ f è una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$

$\boxed{2}$ f non possiede punti singolari

$\boxed{3}$ $z_0 = 0$ è una singolarità eliminabile

$\boxed{4}$ $z_0 = 0$ è un polo

$\boxed{5}$ $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale

$\boxed{6}$ $\mathrm{Res}(f,0) = 2\pi\mathrm{i}$

$\boxed{7}$ $\mathrm{Res}(f,0) = 2\pi$

$\boxed{8}$ $\mathrm{Res}(f,0) = 2$

$\boxed{9}$ $I_R = 0$ per ogni $R>0$

$\boxed{10}$ se $0<R<1$, allora $I_R = 0$

$\boxed{11}$ se $0<R<\sqrt{2}$, allora $I_R = 2\pi\mathrm{i}$

$\boxed{12}$ se $R>1$, allora $I_R = 0$

$\boxed{13}$ se $R>2$, allora $I_R = 4\pi\mathrm{i}$

$\boxed{14}$ I_R non è definito per $R=\sqrt{2}$

Domande teoriche (6 punti)

1. (2 punti) Dare la definizione di curva biregolare.

2. (2 punti) Scrivere la soluzione generale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea.

3. (2 punti) Enunciare il lemma di Abel per le serie di potenze reali.