Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II *Secondo appello – 6 Giugno 2024*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________ **Punteggio Totale:** ____________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 15 minuti.*

Questionario (26 punti)

(☐ domanda a risposta multipla, ◯ domanda a risposta singola)

1. (2 punti) Il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2 x + \cos y - 1}{x^2+y^2}$

   ① non esiste ✓ ② vale -1 ③ vale 1 ④ vale $\frac{1}{2}$ ⑤ vale $-\frac{1}{2}$

2. (3 punti) La derivata della funzione $f(x,y,z) = xy - yz + xz$ lungo il versore $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ nel punto $\mathbf{x}_0 = (1,2,3)$ vale

   ① 0 ② $-\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $-2\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$ ✓

3. (3 punti) La funzione $f(x,y) = \cos x + \cos y$

   - [x] 1 possiede infiniti punti di massimo
   - [x] 2 possiede infiniti punti di minimo
   - [x] 3 possiede infiniti punti di sella
   - [x] 4 $(0,0)$ è un punto di massimo
   - [x] 5 (π,π) è un punto di minimo
   - [x] 6 $(2\pi,3\pi)$ è un punto di sella

4. (3 punti) Si consideri il campo $\mathbf{F} = (y^2+yz, 2xy+xz, xy+z^2)$ e una curva γ regolare che collega i punti $O \equiv (0,0,0)$ e $P \equiv (3,-1,3)$. Allora

   - [ ] 1 $\mathbf{F}$ non è irrotazionale
   - [x] 2 $\mathbf{F}$ è conservativo
   - [ ] 3 $\mathbf{F}$ non ammette funzioni potenziali
   - [x] 4 $\mathbf{F}$ ammette infinite funzioni potenziali
   - [ ] 5 $L_\gamma(\mathbf{F})$ dipende da γ
   - [ ] 6 $L_\gamma(\mathbf{F}) = 0$
   - [ ] 7 $L_\gamma(\mathbf{F}) = 1$
   - [x] 8 $L_\gamma(\mathbf{F}) = 3$

5. (4 punti) Sia S la sfera di centro O e raggio $r > 0$, orientata positivamente. Determinare il valore del raggio r in modo che il flusso del campo $\mathbf{F} = (x + xe^y, 2y - ye^x, 3z + ze^x - ze^y)$ attraverso S sia $\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \pi$.

   $r = 1/2$

6. (4 punti) Determinare la soluzione f del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2x\,e^{y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

   e l'intervallo massimale I sul quale tale soluzione è definita.

   Si ha $f(x) = \log \dfrac{1}{1-x^2}$ e $I = (-1,1)$.

7. (3 punti) La funzione definita da $y(x) = \sum_{n \geq 2} 3^n \frac{x^n}{n!}$ soddisfa l'equazione differenziale

① $y'(x) + 3y(x) = 0$, per ogni $x \in (-1, 1)$

② $y'(x) - 3y(x) = 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$

③ $y'(x) + 3y(x) = 3x$, per ogni $x \in (-1, 1)$

④ $y'(x) - 3y(x) = 3x$, per ogni $x \in \mathbb{R}$

⑤ $y'(x) + 3y(x) = 9x$, per ogni $x \in (-1, 1)$

⑥ ✓ $y'(x) - 3y(x) = 9x$, per ogni $x \in \mathbb{R}$

---

8. (4 punti) Sia $f(z) = z^5 \mathrm{e}^{-3/z^6}$ e sia $I_R = \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$, dove γ_R è la curva di equazione $|z + \mathrm{i}| = R$, orientata positivamente. Allora

[1] f è una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$

[2] f non possiede punti singolari

[3] $z_0 = 0$ è una singolarità eliminabile

[4] $z_0 = 0$ è un polo

[5] ✓ $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale

[6] ✓ $\mathrm{Res}(f, 0) = -3$

[7] $\mathrm{Res}(f, 0) = 3\pi$

[8] $\mathrm{Res}(f, 0) = -3\pi\mathrm{i}$

[9] ✓ se $0 < R < 1$, allora $I_R = 0$

[10] se $0 < R < \sqrt{3}$, allora $I_R = 3\pi\mathrm{i}$

[11] se $R > 1$, allora $I_R = -3\pi\mathrm{i}$

[12] ✓ se $R > \sqrt{3}$, allora $I_R = -6\pi\mathrm{i}$

Domande teoriche (6 punti)

1. (2 punti) Enunciare il teorema di Weierstrass (per le funzioni di più variabili).

2. (2 punti) Scrivere l'identità di Parseval.

3. (2 punti) Enunciare il teorema dei residui.