ANALISI MATEMATICA II *Terzo appello – 4 Luglio 2024*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 15 minuti.*

QUESTIONARIO (26 punti)

(☐ domanda a risposta multipla, ◯ domanda a risposta singola)

1. (3 punti) La funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)(e^{x^2+y^2}-1)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

☐1 è continua in $(0,0)$

☐2 è derivabile in $(0,0)$

☐3 possiede tutte le derivate direzionali in $(0,0)$

☐4 è differenziabile in $(0,0)$

☐5 ha un punto di sella in $(0,0)$

☐6 ha piano tangente $z = 0$ in $(0,0)$

---

2. (2 punti) La funzione $f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 - 3y^4$ ammette, in $\mathbf{x}_0 = (0,0)$, un punto

☐1 critico ☐2 di minimo ☐3 di massimo ☐4 di sella

---

3. (3 punti) Si consideri la trasformazione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x,y) = (x^2 + 2xy, 2xy + y^2)$. Allora

☐1 F è localmente invertibile su tutto $\mathbb{R}^2$

☐2 F non è localmente invertibile in infiniti punti

☐3 F non è localmente invertibile solo in un punto

☐4 F è iniettiva

☐5 F è globalmente invertibile

☐6 $(0,0)$ ammette una sola controimmagine

---

4. (4 punti) Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = (x - y^2 + e^x, xy + y - e^y)$ lungo la curva $\gamma = \partial\Omega$, orientata positivamente, dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\,,\ y \geq 0\}$.

$L_\gamma(\mathbf{F}) =$

---

5. (3 punti) Sia Q il bordo del cubo $[0,\ell] \times [0,\ell] \times [0,\ell]$ di lato $\ell > 0$, orientato positivamente. Determinare il valore di ℓ in modo che il flusso del campo $\mathbf{F} = (3x - xe^y, y + 2ye^x, 2z - 2ze^x + ze^y)$ attraverso Q sia $\Phi_Q(\mathbf{F}) = 2/9$.

$\ell =$

---

6. (4 punti) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - e^x y = e^x \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

☐1 L'equazione differenziale è a variabili separabili

☐2 L'equazione differenziale è lineare

☐3 Il problema di Cauchy dato ammette infinite soluzioni

☐4 Il problema di Cauchy dato ammette esattamente una soluzione

☐5 La soluzione problema di Cauchy dato è definita solo su un intervallo limitato

☐6 La soluzione è $y(x) = e^{e^x - 1}$

☐7 La soluzione è $y(x) = 2e^{e^x-1} - 1$

☐8 La soluzione è $y(x) = 1 - e^{e^x-1}$

7. (3 punti) La serie di potenze complessa $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{3^n z^n}{2^n+1}$ converge

① solo per $z=0$	④ per $\lvert z\rvert > 1$	⑦ per $\lvert z\rvert < 2$	⑩ per $\lvert z\rvert < 2/3$
② per ogni $z \in \mathbb{C}$	⑤ per $\lvert z\rvert < 1$	⑧ per $\lvert z\rvert < 1/3$	⑪ per $\lvert z\rvert < 3/2$
③ per nessun z reale	⑥ per $\lvert z\rvert < 1/2$	⑨ per $\lvert z\rvert < 3$	⑫ per $2/3 < \lvert z\rvert < 3/2$

8. (4 punti) Si consideri la funzione complessa $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{1/z}}{z^2(z^2+\mathrm{i})}$. Allora

- $\boxed{1}$ f è una funzione intera
- $\boxed{2}$ f possiede una sola singolarità
- $\boxed{3}$ f possiede infinite singolarità
- $\boxed{4}$ f possiede solo un polo
- $\boxed{5}$ f possiede due poli semplici
- $\boxed{6}$ $z_0 = 0$ è un polo doppio
- $\boxed{7}$ $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale
- $\boxed{8}$ se $\gamma : |z| = 1/2$, allora $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$
- $\boxed{9}$ se $\gamma : |z-1-\mathrm{i}| = 1$, allora $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$
- $\boxed{10}$ se $\gamma : |z+1+\mathrm{i}| = 1$, allora $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$

Domande teoriche (6 punti)

1. (2 punti) Enunciare il teorema di Schwarz per le funzioni di due variabili.

2. (2 punti) Scrivere la serie di Fourier di una funzione 2π-periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3. (2 punti) Dare la definizione di singolarità essenziale per una funzione complessa f .