

Cognome: _____

Matricola: _____

Nome: _____

Punteggio Totale: _____

Istruzioni. Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

Tempo. 1 ora e 15 minuti.

QUESTIONARIO (26 punti)

(domanda a risposta multipla, domanda a risposta singola)

1. (3 punti) La funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)(e^{x^2+y^2} - 1)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- | | |
|--|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> è continua in $(0, 0)$ | <input checked="" type="checkbox"/> è differenziabile in $(0, 0)$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> è derivabile in $(0, 0)$ | <input type="checkbox"/> ha un punto di sella in $(0, 0)$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> possiede tutte le derivate direzionali in $(0, 0)$ | <input checked="" type="checkbox"/> ha piano tangente $z = 0$ in $(0, 0)$ |

2. (2 punti) La funzione $f(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 - 3y^4$ ammette, in $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, un punto

- | | | | |
|---|------------------------------------|-------------------------------------|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> critico | <input type="checkbox"/> di minimo | <input type="checkbox"/> di massimo | <input checked="" type="checkbox"/> di sella |
|---|------------------------------------|-------------------------------------|--|

3. (3 punti) Si consideri la trasformazione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) = (x^2 + 2xy, 2xy + y^2)$. Allora

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> F è localmente invertibile su tutto \mathbb{R}^2 | <input type="checkbox"/> F è iniettiva |
| <input type="checkbox"/> F non è localmente invertibile in infiniti punti | <input type="checkbox"/> F è globalmente invertibile |
| <input checked="" type="checkbox"/> F non è localmente invertibile solo in un punto | <input checked="" type="checkbox"/> $(0, 0)$ ammette una sola controimmagine |

4. (4 punti) Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = (x - y^2 + e^x, xy + y - e^y)$ lungo la curva $\gamma = \partial\Omega$, orientata positivamente, dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0, y \geq 0\}$.

$$L_\gamma(\mathbf{F}) = 2$$

5. (3 punti) Sia Q il bordo del cubo $[0, \ell] \times [0, \ell] \times [0, \ell]$ di lato $\ell > 0$, orientato positivamente. Determinare il valore di ℓ in modo che il flusso del campo $\mathbf{F} = (3x - xe^y, y + 2ye^x, 2z - 2ze^x + ze^y)$ attraverso Q sia $\Phi_Q(\mathbf{F}) = 2/9$.

$$\ell = 1/3$$

6. (4 punti) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - e^x y = e^x \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

- | | |
|--|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> L'equazione differenziale è a variabili separabili | <input type="checkbox"/> La soluzione problema di Cauchy dato è definita solo su un intervallo limitato |
| <input checked="" type="checkbox"/> L'equazione differenziale è lineare | <input type="checkbox"/> La soluzione è $y(x) = e^{e^x - 1}$ |
| <input type="checkbox"/> Il problema di Cauchy dato ammette infinite soluzioni | <input checked="" type="checkbox"/> La soluzione è $y(x) = 2e^{e^x - 1} - 1$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> Il problema di Cauchy dato ammette esattamente una soluzione | <input type="checkbox"/> La soluzione è $y(x) = 1 - e^{e^x - 1}$ |

7. (3 punti) La serie di potenze complessa $\sum_{n \geq 0} \frac{3^n z^n}{2^n + 1}$ converge

- | | | | |
|---|---|---|--|
| <input type="radio"/> ① solo per $z = 0$ | <input type="radio"/> ④ per $ z > 1$ | <input type="radio"/> ⑦ per $ z < 2$ | <input checked="" type="radio"/> ⑩ per $ z < 2/3$ |
| <input type="radio"/> ② per ogni $z \in \mathbb{C}$ | <input type="radio"/> ⑤ per $ z < 1$ | <input type="radio"/> ⑧ per $ z < 1/3$ | <input type="radio"/> ⑪ per $ z < 3/2$ |
| <input type="radio"/> ③ per nessun z reale | <input type="radio"/> ⑥ per $ z < 1/2$ | <input type="radio"/> ⑨ per $ z < 3$ | <input type="radio"/> ⑫ per $2/3 < z < 3/2$ |
-

8. (4 punti) Si consideri la funzione complessa $f(z) = \frac{e^{1/z}}{z^2(z^2 + i)}$. Allora

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> 1 f è una funzione intera | <input checked="" type="checkbox"/> 7 $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale |
| <input type="checkbox"/> 2 f possiede una sola singolarità | <input checked="" type="checkbox"/> 8 se $\gamma : z = 1/2$, allora $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ |
| <input type="checkbox"/> 3 f possiede infinite singolarità | <input checked="" type="checkbox"/> 9 se $\gamma : z - 1 - i = 1$, allora $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ |
| <input type="checkbox"/> 4 f possiede solo un polo | <input checked="" type="checkbox"/> 10 se $\gamma : z + 1 + i = 1$, allora $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 5 f possiede due poli semplici | |
| <input type="checkbox"/> 6 $z_0 = 0$ è un polo doppio | |
-

DOMANDE TEORICHE (6 punti)

1. (2 punti) Enunciare il teorema di Schwarz per le funzioni di due variabili.

2. (2 punti) Scrivere la serie di Fourier di una funzione 2π -periodica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

3. (2 punti) Dare la definizione di singolarità essenziale per una funzione complessa f .