Analisi Matematica II — *Quarto appello – 2 settembre 2024*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 15 minuti.*

Questionario (26 punti)

(☐ domanda a risposta multipla, ◯ domanda a risposta singola)

1. (3 punti) La funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

☐1 è continua in $(0,0)$

☐2 è derivabile in $(0,0)$

☐3 possiede tutte le derivate direzionali in $(0,0)$

☐4 è differenziabile in $(0,0)$

☐5 ha un punto critico in $(0,0)$

☐6 ha un punto di minimo in $(0,0)$

☐7 ha un punto di massimo in $(0,0)$

☐8 ha un punto di sella in $(0,0)$

---

2. (3 punti) Si consideri la funzione $f(x,y) = x^4y - 2x^2y + y^3 + x - 3y$ e il punto $\mathbf{x}_0 = (1,1)$. Allora, si ha $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = 1$

① per nessun versore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$

② per un solo versore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$

③ esattamente per due versori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$

④ per infiniti versori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$

---

3. (3 punti) La lunghezza della curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos 2t^2 \\ y = \sin 2t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

è

① $L = 1$ ② $L = 7$ ③ $L = \dfrac{63}{9}$ ④ $L = \dfrac{61}{27}$ ⑤ $L = \dfrac{21}{3}$

---

4. (4 punti) Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + \sin y^2, x^2 + 2xy\cos y^2)$ lungo la curva $\gamma = \partial\Omega$, orientata positivamente, dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \leq x\}$.

$L_\gamma(\mathbf{F}) =$

---

5. (3 punti) Sia Σ il bordo del rettangolo $[0,\ell] \times [0,2\ell] \times [0,3\ell]$, orientato positivamente. Determinare il valore del parametro reale $\ell > 0$ in modo che il flusso del campo $\mathbf{F} = (2xz + x\cos y, y - \sin y + \mathrm{e}^z, x^2 + y^2 - z^2)$ attraverso Σ sia $\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = 3/4$.

$\ell =$

---

6. (3 punti) Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''(x) + 7y'(x) - 8y(x) = \mathrm{e}^x$.

---

7. (3 punti) La serie di potenze reale $\sum_{n\geq 0} 2^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\boxed{1}$ converge solo per $x = 0$

$\boxed{2}$ converge per $|x| < 1$

$\boxed{3}$ converge per ogni $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{4}$ è uguale a $\cos 2x$

$\boxed{5}$ è uguale a $\sin \sqrt{2}x$

$\boxed{6}$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}} \cosh \sqrt{2}x$

$\boxed{7}$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh \sqrt{2}x$

$\boxed{8}$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cosh \sqrt{2}x - 1)$

$\boxed{9}$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}x - x$

---

8. (4 punti) Si consideri la funzione complessa $f(z) = z^2 \mathrm{e}^{2/z} - z^3 \mathrm{e}^{-3z}$. Allora

$\boxed{1}$ f è una funzione olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\boxed{2}$ f è una funzione intera

$\boxed{3}$ f possiede una sola singolarità

$\boxed{4}$ f possiede infinite singolarità

$\boxed{5}$ f possiede solo un polo

$\boxed{6}$ f possiede solo una singolarità essenziale

$\boxed{7}$ $\mathrm{Res}(f, 0) = 0$

$\boxed{8}$ $\mathrm{Res}(f, 0) = 4/3$

$\boxed{9}$ $\mathrm{Res}(f, 0) = 1/6$

$\boxed{10}$ se $\gamma : |z| = 1$, allora $\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 0$

$\boxed{11}$ se $\gamma : |z - \mathrm{i}| = 1/2$, allora $\int_\gamma z^2 \mathrm{e}^z f(z)\, \mathrm{d}z = 0$

$\boxed{12}$ se $\gamma : |z - 1 - \mathrm{i}| = 1$, allora $\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 0$

Domande teoriche (6 punti)

1. (2 punti) Scrivere la definizione di curva biregolare.

2. (2 punti) Scrivere la definizione di campo conservativo.

3. (2 punti) Scrivere la definizione di funzione armonica.