

Cognome: _____

Matricola: _____

Nome: _____

Punteggio Totale: _____

Istruzioni. Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

Tempo. 1 ora e 15 minuti.

QUESTIONARIO (26 punti)

(domanda a risposta multipla, domanda a risposta singola)

1. (3 punti) La funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1 è continua in $(0, 0)$

5 ha un punto critico in $(0, 0)$

2 è derivabile in $(0, 0)$

6 ha un punto di minimo in $(0, 0)$

3 possiede tutte le derivate direzionali in $(0, 0)$

7 ha un punto di massimo in $(0, 0)$

4 è differenziabile in $(0, 0)$

8 ha un punto di sella in $(0, 0)$

2. (3 punti) Si consideri la funzione $f(x, y) = x^4y - 2x^2y + y^3 + x - 3y$ e il punto $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$. Allora, si ha $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = 1$

① per nessun vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$

⑤ esattamente per due vettori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$

② per un solo vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$

④ per infiniti vettori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$

3. (3 punti) La lunghezza della curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos 2t^2 \\ y = \sin 2t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

è

① $L = 1$

② $L = 7$

③ $L = \frac{63}{9}$

④ $L = \frac{61}{27}$

⑤ $L = \frac{21}{3}$

4. (4 punti) Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + \sin y^2, x^2 + 2xy \cos y^2)$ lungo la curva $\gamma = \partial\Omega$, orientata positivamente, dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \leq x\}$.

$$L_{\gamma}(\mathbf{F}) = \frac{4}{3} \sqrt{2}$$

5. (3 punti) Sia Σ il bordo del rettangolo $[0, \ell] \times [0, 2\ell] \times [0, 3\ell]$, orientato positivamente. Determinare il valore del parametro reale $\ell > 0$ in modo che il flusso del campo $\mathbf{F} = (2xz + x \cos y, y - \sin y + e^z, x^2 + y^2 - z^2)$ attraverso Σ sia $\Phi_{\Sigma}(\mathbf{F}) = 3/4$.

$$\ell = 1/2$$

6. (3 punti) Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''(x) + 7y'(x) - 8y(x) = e^x$.

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-8x} + \frac{x}{9} e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

7. (3 punti) La serie di potenze reale $\sum_{n \geq 0} 2^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

- | | | |
|--|--|---|
| <input type="checkbox"/> 1 converge solo per $x = 0$ | <input type="checkbox"/> 4 è uguale a $\cos 2x$ | <input checked="" type="checkbox"/> 7 è uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh \sqrt{2}x$ |
| <input type="checkbox"/> 2 converge per $ x < 1$ | <input type="checkbox"/> 5 è uguale a $\sin \sqrt{2}x$ | <input type="checkbox"/> 8 è uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}} (\cosh \sqrt{2}x - 1)$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 3 converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ | <input type="checkbox"/> 6 è uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}} \cosh \sqrt{2}x$ | <input type="checkbox"/> 9 è uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}x - x$ |

8. (4 punti) Si consideri la funzione complessa $f(z) = z^2 e^{2/z} - z^3 e^{-3z}$. Allora

- | | |
|---|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 f è una funzione olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ | <input type="checkbox"/> 7 $\text{Res}(f, 0) = 0$ |
| <input type="checkbox"/> 2 f è una funzione intera | <input checked="" type="checkbox"/> 8 $\text{Res}(f, 0) = 4/3$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 3 f possiede una sola singolarità | <input type="checkbox"/> 9 $\text{Res}(f, 0) = 1/6$ |
| <input type="checkbox"/> 4 f possiede infinite singolarità | <input type="checkbox"/> 10 se $\gamma : z = 1$, allora $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ |
| <input type="checkbox"/> 5 f possiede solo un polo | <input checked="" type="checkbox"/> 11 se $\gamma : z - i = 1/2$, allora $\int_{\gamma} z^2 e^z f(z) dz = 0$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 6 f possiede solo una singolarità essenziale | <input checked="" type="checkbox"/> 12 se $\gamma : z - 1 - i = 1$, allora $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ |

DOMANDE TEORICHE (6 punti)

1. (2 punti) Scrivere la definizione di curva biregolare.

2. (2 punti) Scrivere la definizione di campo conservativo.

3. (2 punti) Scrivere la definizione di funzione armonica.