Analisi e Geometria 1
Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Docenti: Gianluca Mola, Emanuele Munarini, Paolo Terenzi
Seconda prova in itinere, 27 Gennaio 2009
Compito A

Cognome: ______________________ **Nome:** ______________________
Matricola: ______________________

1. Dire per quali valori del parametro reale α l'integrale
$$I = \int_0^1 \frac{(\mathrm{e}^x - 1 - x)(1-x)^{2/3}}{\sqrt{x}\,(\sin x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$$
è convergente

2. Dato il problema di Cauchy
$$\begin{cases} x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0 \\ y(\sqrt{3}) = \sqrt{8} \end{cases}$$
   (a) mostrare che localmente esso ammette esattamente una soluzione.
   (b) Determinare tale soluzione.

3. Determinare il centro ed il raggio della circonferenza
$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 3 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0\,. \end{cases}$$

4. Calcolare la massa totale e le coordinate del baricentro dell'elica cilindrica di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = h\,\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi] \\ (r, h > 0) \end{array}$$
munita della densità di massa $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta\,.$

5. Enunciare e dimostrare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale.

Es. 1	**Es. 2**	**Es. 3**	**Es. 4**	**Es. 5**	**Totale**
6 punti	9 punti	7 punti	8 punti	3 punti	

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.
Tempo: due ore.

Soluzione compito A

1. La funzione $f(x)$ che compare sotto il segno di integrale non è definita solo in $x = 0$. In un intorno destro di questo punto si ha
$$f(x) \sim \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{\alpha-3/2}}\,.$$
Pertanto, l'integrale I è convergente per $\alpha - 3/2 < 1$, ossia $\alpha < 5/2$.

2. (a) L'equazione differenziale è del primo ordine a variabili separabili e in forma normale diventa
$$y' = a(x)b(y) = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}\,.$$
Poiché la funzione $a(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ e la funzione $b(y)$ è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R} \setminus 0$, il problema di Cauchy ammette esattamente una soluzione in un intorno delle condizioni iniziali date.

   (b) Separando le variabili si ha
$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,\mathrm{d}y = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$
Quindi, integrando, si ottiene $\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c$, dove c è una costante reale arbitraria. Imponendo la condizione iniziale $y(\sqrt{3}) = \sqrt{8}$, si ottiene $c = 5$ e quindi
$$y = \pm\sqrt{(5-\sqrt{1+x^2})^2 - 1} = \pm\sqrt{25 + x^2 - 10\sqrt{1+x^2}}\,.$$
Infine, poichè $y(\sqrt{3}) > 0$, la soluzione cercata è $y = \sqrt{25 + x^2 - 10\sqrt{1+x^2}}\,.$

3. La circonferenza γ è definita come l'intersezione di un piano π e di una sfera S di centro $C \equiv (1,-1,2)$ e di raggio $\sqrt{3}$. Il centro della circonferenza γ è il punto $C' = n \cap \pi$, dove n è la retta passante per C e ortogonale a π, avente equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t\,. \end{cases}$$
Intersecando n con π si trova $t = 1/3$. Quindi $C' \equiv (4/3, -1/3, 5/3)$. Infine, il raggio r' della circonferenza γ è $r' = \sqrt{r^2 - d^2}$ dove d è la distanza di C da π (o, equivalentemente, da C'). Poiché $d = \sqrt{2/3}$, si ha $r' = \sqrt{7/3}$.

4. La massa totale di γ è
$$M = \int_\gamma \rho \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)\sqrt{r^2+h^2}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\,\sqrt{r^2+h^2}$$
e le coordinate del baricentro sono
$$\overline{x} = \frac{1}{M}\int_\gamma \rho\, x\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta) r\cos\theta\sqrt{r^2+h^2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{r}{2}$$
$$\overline{y} = \frac{1}{M}\int_\gamma \rho\, y\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta) r\sin\theta\sqrt{r^2+h^2}\,\mathrm{d}\theta = 0$$
$$\overline{z} = \frac{1}{M}\int_\gamma \rho\, z\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta) h\theta\sqrt{r^2+h^2}\,\mathrm{d}\theta = h\pi\,.$$

Analisi e Geometria 1
Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Docenti: Gianluca Mola, Emanuele Munarini, Paolo Terenzi
Seconda prova in itinere, 27 Gennaio 2009
Compito B

Cognome: ______________________ **Nome:** ______________________
Matricola: ______________________

1. Dire per quali valori del parametro reale α l'integrale
$$I = \int_0^1 \frac{(1 + x - \mathbf{e}^x)\sqrt{x}}{(1+x)^{2/3}\,(\sin x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$$
è convergente

2. Dato il problema di Cauchy
$$\begin{cases} x\sqrt{1+y^2} - yy'\sqrt{1+x^2} = 0 \\ y(\sqrt{8}) = -\sqrt{3} \end{cases}$$
   (a) mostrare che localmente esso ammette esattamente una soluzione.
   (b) Determinare tale soluzione.

3. Determinare il centro ed il raggio della circonferenza
$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 1 = 0 \\ x + y - 3z - 1 = 0\,. \end{cases}$$

4. Calcolare la massa totale e le coordinate del baricentro dell'elica cilindrica di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = h\,\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi] \\ (r, h > 0) \end{array}$$
munita della densità di massa $\rho(\theta) = 1 - \cos\theta\,.$

5. Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Totale
6 punti	9 punti	7 punti	8 punti	3 punti	

Punteggio minimo per superare la prova = 18 punti.
Tempo: due ore.

Risultati compito B

1. L'integrale I è convergente per $\alpha < 7/2$.
2. $y = -\sqrt{(\sqrt{1+x^2}-1)^2 - 1} = -\sqrt{1+x^2+2\sqrt{1+x^2}}$.
3. $C' \equiv (6/11, 17/11, 4/11)$, $r' = \sqrt{30/11}$.
4. $M = 2\pi\sqrt{r^2+h^2}$, $\overline{x} = -r/2$, $\overline{y} = 0$, $\overline{z} = h\pi$.