

1. (a) Un numero complesso diverso da zero è invertibile.  
 Vero     Falso
- (b) Una successione illimitata superiormente è divergente a  $+\infty$ .  
 Vero     Falso
- (c) Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  ammette un minimo in ogni punto in cui si annulla.  
 Vero     Falso
2. (a) In un gruppo, ogni elemento è invertibile.  
 Vero     Falso
- (b) Se  $f_n \sim a_n$  e  $g_n \sim b_n$  per  $n \rightarrow +\infty$ , allora  $f_n g_n \sim a_n b_n$  per  $n \rightarrow +\infty$ .  
 Vero     Falso
- (c) Una funzione convergente in un punto  $x_0$  è anche continua in  $x_0$ .  
 Vero     Falso
3. (a) Il prodotto di due numeri irrazionali è un numero irrazionale.  
 Vero     Falso
- (b) Una successione monotona è convergente.  
 Vero     Falso
- (c) Se una funzione  $f$  è derivabile in un punto  $x_0$ , allora esiste la retta tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(x_0, f(x_0))$ .  
 Vero     Falso
4. (a) In un campo, ogni elemento è invertibile (rispetto al prodotto).  
 Vero     Falso
- (b) Se  $f_n \sim a_n$  e  $g_n \sim b_n$  per  $n \rightarrow +\infty$ , allora  $f_n + g_n \sim a_n + b_n$  per  $n \rightarrow +\infty$ .  
 Vero     Falso
- (c) Una funzione continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ammette sempre almeno uno zero nell'intervallo  $(a, b)$ .  
 Vero     Falso
5. (a) Sul campo complesso, un'equazione polinomiale di grado  $n$  possiede sempre esattamente  $n$  soluzioni (pur di contarle con la debita molteplicità).  
 Vero     Falso
- (b) Una successione limitata è convergente.  
 Vero     Falso
- (c) Una funzione continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  trasforma intervalli in intervalli.  
 Vero     Falso

6. (a) Esistono numeri complessi di modulo negativo.  
 Vero     Falso
- (b) Una successione convergente è limitata.  
 Vero     Falso
- (c) Se esiste la retta tangente al grafico di una funzione  $f$  nel punto  $(x_0, f(x_0))$ , allora  $f$  è derivabile in un punto  $x_0$ .  
 Vero     Falso
7. (a) Il limite del prodotto di due successioni convergenti è il prodotto dei limiti delle due successioni.  
 Vero     Falso
- (b) Una funzione continua in un punto  $x_0$  è convergente in  $x_0$ .  
 Vero     Falso
- (c) Una funzione continua  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ammette sempre almeno un punto di massimo assoluto.  
 Vero     Falso
8. (a) Una successione di numeri razionali non può convergere a un numero irrazionale.  
 Vero     Falso
- (b) L'immagine di una funzione continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ .  
 Vero     Falso
- (c) Una funzione derivabile su un intervallo  $(a, b)$  è sempre di classe  $C^1$  su  $(a, b)$ .  
 Vero     Falso
9. (a) Una funzione iniettiva  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è invertibile.  
 Vero     Falso
- (b) La composizione di due funzioni continue può non essere continua.  
 Vero     Falso
- (c) Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  può sempre essere scritta come somma di una funzione pari e di una funzione dispari.  
 Vero     Falso
10. (a) L'equazione  $(z - 3 + i)^5 = (1 - 2i)^5$  ammette solo la soluzione  $z = 4 - 3i$ .  
 Vero     Falso
- (b) La funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da  $f(x) = x^2$ , è suriettiva.  
 Vero     Falso
- (c) Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, derivabile sull'intervallo  $(a, b)$ . Se  $f(a) \neq f(b)$ , allora  $f'(x) \neq 0$  per ogni  $x \in (a, b)$ .  
 Vero     Falso
11. (a) La funzione  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definita da  $f(z) = z^2$ , è suriettiva.  
 Vero     Falso
- (b) Una successione convergente è monotona.  
 Vero     Falso
- (c) Una funzione derivabile  $f : (0, 1) \cup (2, 3) \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f'(x) = 0$  per ogni  $x \in (0, 1) \cup (2, 3)$  è costante.  
 Vero     Falso

12. (a) La trasformazione  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definita da  $f(z) = iz$ , rappresenta una rotazione attorno all'origine, in senso antiorario, di un angolo  $\theta = \pi$ .  
 Vero     Falso
- (b) Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  può avere due asintoti obliqui diversi per  $x \rightarrow +\infty$  e per  $x \rightarrow -\infty$ .  
 Vero     Falso
- (c) Se una funzione possiede un punto di minimo, allora è necessariamente derivabile in quel punto.  
 Vero     Falso
13. (a) L'equazione  $|z - 1 + i| = 1$  ammette infinite soluzioni in  $\mathbb{C}$ .  
 Vero     Falso
- (b) Una successione convergente può avere più di un limite.  
 Vero     Falso
- (c) Se una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  possiede un asintoto obliquo per  $x \rightarrow +\infty$ , allora non può avere un asintoto orizzontale per  $x \rightarrow +\infty$ .  
 Vero     Falso
14. (a) La trasformazione  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definita da  $f(z) = \bar{z}$ , rappresenta una simmetria.  
 Vero     Falso
- (b) Se una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  possiede un asintoto obliquo per  $x \rightarrow +\infty$ , allora non può avere un asintoto orizzontale per  $x \rightarrow -\infty$ .  
 Vero     Falso
- (c) Il prodotto di due funzioni derivabili è una funzione derivabile.  
 Vero     Falso
15. (a) Il modulo di un numero complesso  $z = x + iy$  è  $|z| = x^2 + y^2$ .  
 Vero     Falso
- (b) L'immagine di una funzione coincide con il suo codominio.  
 Vero     Falso
- (c) Se una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  possiede derivata prima nulla in un punto  $x_0$ , allora possiede un punto di massimo o di minimo in  $x_0$ .  
 Vero     Falso
16. (a) Un sottoinsieme non vuoto di  $\mathbb{R}$  superiormente limitato possiede sempre un massimo.  
 Vero     Falso
- (b) Una funzione continua  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è necessariamente limitata.  
 Vero     Falso
- (c) Una funzione monotona  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  assume i suoi valori massimi e minimi agli estremi dell'intervallo.  
 Vero     Falso
17. (a) Se esiste, l'estremo superiore di un sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}$  è il massimo dei minoranti di  $X$ .  
 Vero     Falso
- (b) Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Se esiste un punto  $x_0 \in (a, b)$  tale che  $f(x_0) = 0$ , allora  $f(a)f(b) < 0$ .  
 Vero     Falso

(c) La funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da  $f(x) = e^x$ , è di classe  $C^\infty$  su  $\mathbb{R}$ .

Vero     Falso

18. (a) Il numero complesso

$$1 - i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

è scritto in forma trigonometrica.

Vero     Falso

(b) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora anche la funzione  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da  $g(x) = |f(x)|$ , è continua.

Vero     Falso

(c) La funzione  $\sin x$  è liscia su tutto  $\mathbb{R}$ .

Vero     Falso

19. (a) L'argomento del prodotto di due numeri complessi non nulli è la somma degli argomenti dei due numeri.

Vero     Falso

(b) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione e sia  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Se  $f(x) \geq f(x_0)$ , per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , allora  $f$  possiede un punto di minimo assoluto in  $x_0$ .

Vero     Falso

(c) Sia  $f_n$  una successione tale che  $f_n \leq f_{n+1}$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Allora  $f_n$  è una successione crescente.

Vero     Falso

20. (a) Il modulo della somma di due numeri complessi è sempre la somma dei moduli dei due numeri.

Vero     Falso

(b) Una successione divergente a  $+\infty$  è illimitata.

Vero     Falso

(c) Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile due volte per cui  $f''(x) \leq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  ha concavità rivolta verso il basso.

Vero     Falso

21. (a) La parte immaginaria di un numero complesso  $z = a + ib$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ , è  $ib$ .

Vero     Falso

(b) La derivata della funzione  $f(x)g(x)$  è  $f'(x)g'(x)$ .

Vero     Falso

(c) La funzione  $f(x) = e^{-x}$  è infinitesima per  $x \rightarrow +\infty$ .

Vero     Falso

22. (a) Vale il limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Vero     Falso

(b) La funzione  $f(x) = \frac{1}{x}$  ha una discontinuità nel punto  $x = 0$ .

Vero     Falso

(c) Se la funzione  $f : (0, 1) \rightarrow (1, 2) \cup (2, 3)$  è suriettiva, allora non può essere continua.

Vero     Falso

## Risposte

1. (a) Vero  
(b) Falso. Ad esempio, la successione  $a_n = (-1)^n n$  è illimitata superiormente, ma non è divergente a  $+\infty$  (né a  $-\infty$ ).  
(c) Vero
2. (a) Vero  
(b) Vero  
(c) Falso
3. (a) Falso. Ad esempio,  $\sqrt{2}$  è irrazionale, ma  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$  è razionale.  
(b) Falso. Una successione monotona è regolare, ma non è necessariamente convergente. Una successione monotona e limitata superiormente o inferiormente è convergente.  
(c) Vero
4. (a) Falso. In un campo, ogni elemento non nullo è invertibile.  
(b) Falso. Ad esempio, se  $f_n = n^3 + n^2$ ,  $g_n = -n^3 + n$ ,  $a_n = n^3 - n + 1$  e  $b_n = -n^3 + 2n$ , si ha  $f_n \sim a_n$  e  $g_n \sim b_n$  per  $n \rightarrow +\infty$ , ma  $f_n + g_n \not\sim a_n + b_n$  per  $n \rightarrow +\infty$ , essendo  $f_n + g_n = n^2 + n$  e  $a_n + b_n = n + 1$ .  
(c) Falso. Per poter applicare il teorema degli zeri deve essere  $f(a)f(b) < 0$ . In generale, la proprietà è falsa, come accade, ad esempio, per una funzione costante non nulla.
5. (a) Vero, per il teorema fondamentale dell'algebra.  
(b) Falso. La successione  $f_n = (-1)^n$  è limitata, ma non è convergente.  
(c) Vero
6. (a) Falso  
(b) Vero  
(c) Falso. Affinché la funzione sia derivabile, la tangente non deve essere verticale.
7. (a) Vero  
(b) Vero  
(c) Falso. Ad esempio, la funzione  $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da  $f(x) = \operatorname{tg} x$ , è continua, ma non ammette massimo (né minimo).
8. (a) Falso. Ad esempio, la successione  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  è razionale e converge al numero  $e$  che è irrazionale.  
(b) Falso, è un intervallo chiuso e limitato.  
(c) Falso. La derivata prima, anche se esiste, non è necessariamente continua. Ad esempio, la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile su tutto  $\mathbb{R}$ , ma la derivata prima  $f'$  non è continua in  $x = 0$ .

9. (a) Falso. È invertibile solo se è anche suriettiva (ossia se l'immagine coincide con il codominio).  
(b) Falso. La composizione di due funzioni continue è sempre una funzione continua.  
(c) Vero
10. (a) Falso. Poiché si tratta di un'equazione polinomiale di grado 5, per il teorema fondamentale dell'algebra, essa ammette esattamente 5 soluzioni. In questo caso, le soluzioni sono tutte distinte.

- (b) Falso.  $\text{Im } f = [0, +\infty) \neq \mathbb{R}$ .
- (c) Falso
11. (a) Vero. Ogni numero complesso  $z$  ammette due radici quadrate sul campo complesso (distinte, se  $z \neq 0$ ).
- (b) Falso. Ad esempio, la successione  $f_n = \frac{(-1)^n}{n}$  converge a  $0$ , ma non è monotona.
- (c) Falso. È costante solo su ogni singolo intervallo.
12. (a) Falso. Rappresenta una rotazione attorno all'origine, in senso antiorario, di un angolo  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .
- (b) Vero
- (c) Falso. Ad esempio la funzione definita da  $f(x) = |x|$  ha un minimo in  $x = 0$ , ma in quel punto non è derivabile.
13. (a) Vero. L'equazione data rappresenta la circonferenza di centro  $z_0 = 1 - i$  e di raggio  $1$ .
- (b) Falso
- (c) Vero
14. (a) Vero. Rappresenta la simmetria rispetto all'asse reale.
- (b) Falso
- (c) Vero
15. (a) Falso. Si ha  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- (b) Falso. L'immagine di una funzione coincide con il suo codominio solo quando è suriettiva.
- (c) Falso. Si può avere un flesso a tangente orizzontale.
16. (a) Falso. Possiede sempre un estremo superiore, che non è necessariamente un elemento dell'insieme.
- (b) Falso. Ad esempio, la funzione  $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da  $f(x) = \text{tg } x$ , è continua, ma non è limitata.
- (c) Vero
17. (a) Falso. È il minimo dei maggioranti di  $X$ . Il massimo dei minoranti di  $X$ , se esiste, è l'estremo inferiore.
- (b) Falso. Ad esempio, la funzione  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da  $f(x) = x^2$ , è continua e  $f(0) = 0$ , ma  $f(-1)f(1) = 1 > 0$ .
- (c) Vero
18. (a) Falso. La forma trigonometrica è

$$1 - i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right).$$

- (b) Vero. La composizione di funzioni continue è una funzione continua.
- (c) Vero
19. (a) Vero
- (b) Vero
- (c) Vero
20. (a) Falso
- (b) Vero
- (c) Vero

21. (a) Falso. È  $b$ .  
(b) Falso. È  $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ .  
(c) Vero. Infatti, si ha  $e^{-x} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$ .
22. (a) Falso. Si ha un limite notevole per  $x \rightarrow 0$ . In questo caso, si ha una funzione limitata per una funzione infinitesima e quindi il limite è  $0$ .  
(b) Falso. Per avere un punto di discontinuità, la funzione deve essere definita in quel punto.  
(c) Vero. Una funzione continua trasforma intervalli in intervalli.