1. (a) Se f è una funzione derivabile, allora $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{artg} f(x) + \text{cost}$.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (b) Se un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ha norma nulla, allora $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (c) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, esistono infinite rette passanti per un punto P e ortogonali a un piano π, con $P \notin \pi$.

   ◯ Vero ◯ Falso

2. (a) Una funzione continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è sempre integrabile.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (b) Il vettore nullo $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ è ortogonale a ogni altro vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (c) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, esiste una sola retta passante per un punto P e ortogonale a una retta r, con $P \notin r$.

   ◯ Vero ◯ Falso

3. (a) Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile quando le somme di Cauchy-Riemann $S_n(f)$ convergono.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (b) Due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ sono ortogonali se e solo se è nullo il loro prodotto vettoriale.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (c) La distanza di un punto P da un piano π è uguale alla distanza di P dal punto P' proiezione ortogonale di P sul piano π.

   ◯ Vero ◯ Falso

4. (a) L'operatore di derivazione $D : \mathcal{C}^1([a,b]) \to \mathcal{C}^0([a,b])$ è lineare.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (b) Un'equazione differenziale del primo ordine $y' = F(x,y)$ può ammettere soluzioni non derivabili.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (c) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, esistono infinite rette incidenti e ortogonali a due rette sghembe.

   ◯ Vero ◯ Falso

5. (a) Se l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge semplicemente, allora converge assolutamente.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (b) Il problema di Cauchy relativo a un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili ammettere sempre una e una sola soluzione.

   ◯ Vero ◯ Falso

(c) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, due rette ortogonali sono incidenti.

◯ Vero ◯ Falso

6. (a) Una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ con una discontinuità di prima specie in un punto $x_0 \in (a,b)$ non può ammettere primitiva sull'intervallo (a,b).

   ◯ Vero ◯ Falso

   (b) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, si ha la disuguaglianza $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \geq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (c) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, due rette complanari sono parallele o incidenti.

   ◯ Vero ◯ Falso

7. (a) L'operatore di derivazione $D : \mathcal{C}^1([a,b]) \to \mathcal{C}^0([a,b])$ è suriettivo.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (b) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, l'equazione $x - y + 1 = 0$ rappresenta una retta.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (c) Il vettore tangente di una curva regolare è diretto nel verso di percorrenza della curva.

   ◯ Vero ◯ Falso

8. (a) Siano $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ e $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni continue positive asintoticamente equivalenti per $x \to +\infty$. Allora, gli integrali impropri $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ e $\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ hanno lo stesso carattere.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (b) I vettori $\mathbf{x} = (1, 2, -2)$ e $\mathbf{y} = (\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 2)$ hanno la stessa lunghezza.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (c) Il versore normale di una curva biregolare giace sul piano osculatore della curva (nello stesso punto).

   ◯ Vero ◯ Falso

9. (a) Il problema di Cauchy relativo a un'equazione differenziale a variabili separabili può ammettere infinite soluzioni.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (b) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, esiste un solo piano passante per una retta r e per un punto P, con $P \notin r$.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (c) Il piano rettificante di una curva biregolare è generato dal versore tangente e dal versore binormale.

   ◯ Vero ◯ Falso

10. (a) La funzione definita da $f(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$ è integrabile in senso improprio sull'intervallo $(0,1]$.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (b) Due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ sono paralleli se e solo se il loro prodotto vettoriale è nullo.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (c) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, due piani ortogonali si intersecano sempre lungo una retta.

   ◯ Vero ◯ Falso

11. (a) L'equazione differenziale $y'(t) = \frac{\cos(y(t)+y(t)^2)}{(1+t)(1-y(t))}$ non è a variabili separabili.

   ◯ Vero ◯ Falso

(b) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, esistono infinite rette incidenti e ortogonali a due rette parallele distinte.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ rappresenta una sfera reale.

◯ Vero ◯ Falso

12. (a) Ogni funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, due rette che non hanno punti in comune sono parallele.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Il riferimento intrinseco di una curva biregolare varia al variare del punto sulla curva stessa.

◯ Vero ◯ Falso

13. (a) L'operatore di derivazione $D : \mathcal{C}^1([a, b]) \to \mathcal{C}^0([a, b])$ è iniettivo.

◯ Vero ◯ Falso

(b) L'equazione differenziale $y' = xy - 2x$ è a variabili separabili ed è lineare.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Una curva biregolare è piana se e solo se il versore binormale è costante.

◯ Vero ◯ Falso

14. (a) Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua dispari. Allora $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(1 + y^2)\,\mathrm{e}^{x\mathrm{e}^x + y}}{1 + y^6} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione (locale).

◯ Vero ◯ Falso

(c) Gli integrali di linea (di prima specie) non dipendono dalla parametrizzazione.

◯ Vero ◯ Falso

15. (a) Una funzione derivabile $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, esistono infiniti piani passanti per un punto P e ortogonali a una retta r.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Una curva semplice è regolare.

◯ Vero ◯ Falso

16. (a) Se p e q sono due funzioni continue su un intervallo (a, b), allora tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x) - p(x)y(x) = q(x)$ sono di classe $\mathcal{C}^1$ su (a, b).

◯ Vero ◯ Falso

(b) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, esistono infiniti piani ortogonali a un piano π e passanti per un punto P, $P \notin \pi$.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Una curva è gobba quando ha curvatura negativa.

◯ Vero ◯ Falso

17. (a) Se $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua pari, allora $\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

◯ Vero ◯ Falso

(b) I due vettori $\mathbf{x} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{y} = (0, 1, -1)$ formano un angolo $\theta = \frac{\pi}{6}$.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, esiste un'unica sfera passante per una circonferenza data.

◯ Vero ◯ Falso

18. (a) Ogni funzione integrale di una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è sempre di classe $\mathcal{C}^1$ sull'intervallo $[a, b]$.

◯ Vero ◯ Falso

(b) L'identità di Lagrange afferma che $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}\| = \sqrt{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$.

◯ Vero ◯ Falso

(c) La terna intrinseca $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ di una curva biregolare è sempre una base orientata positivamente di $\mathbb{R}^3$.

◯ Vero ◯ Falso

19. (a) L'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ è divergente.

◯ Vero ◯ Falso

(b) L'equazione differenziale $xy'(x) = y(x) + x$ è in forma normale.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Il prodotto misto di tre vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ è un numero reale positivo o nullo.

◯ Vero ◯ Falso

20. (a) Se $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua positiva e infinitesima per $x \to +\infty$, allora l'integrale improprio $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

◯ Vero ◯ Falso

(b) La funzione $y(x) = \sqrt{x}$ è una soluzione dell'equazione differenziale $y(x)y'(x) = \frac{1}{2}$ su tutto l'intervallo $[0, +\infty)$.

◯ Vero ◯ Falso

(c) I vettori $\mathbf{x} = (123, 234, 345)$ e $\mathbf{y} = (111, 222, 333)$ formano un angolo $\theta = \frac{5}{4}\pi$.

◯ Vero ◯ Falso

21. (a) L'integrale improprio di una funzione continua positiva è convergente o divergente.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, la distanza tra un punto P e una retta r coincide con la distanza tra il punto P e il punto P' proiezione ortogonale di P su r.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Una curva biregolare piana giace sempre sul suo piano rettificante.

◯ Vero ◯ Falso

22. (a) Se $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua positiva e infinitesima di ordine 2 per $x \to +\infty$ (rispetto all'infinitesimo campione $1/x$), allora l'integrale improprio $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, esistono piani che contengono due rette sghembe.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Il piano normale di una curva biregolare è generato dal versore normale e dal versore binormale.

◯ Vero ◯ Falso

23. (a) Se una funzione è integrabile, allora è anche continua.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una funzione vettoriale derivabile e sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora la funzione composta $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, definita da $F(t) = f(\varphi(t))$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, è derivabile e $F'(t) = \varphi'(t) f'(\varphi(t))$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Il punto $O \equiv (0,0,0)$ è un punto multiplo della curva

$$\gamma : \begin{cases} x = (2t+1)(3t+1)(4t-3) \\ y = (2t+1)^2(3t+1)(t-5) \\ z = (2t+1)(3t+1)^2(5t-4)^3 . \end{cases}$$

◯ Vero ◯ Falso

24. (a) L'integrale indefinito di una funzione è l'insieme di tutte le sue primitive.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Una sfera possiede un solo equatore.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Una curva biregolare può presentare punti in cui la curvatura è nulla.

◯ Vero ◯ Falso

25. (a) Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua positiva tale che $f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ per ogni $x \in (0,1]$ e tale che $f(x) \leq \frac{1}{x^3}$ per ogni $x \in [1, +\infty)$. Allora l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Il piano $\pi : 2x + y + 3z - 2 = 0$ appartiene al fascio di piani che ha per sostegno la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$, dove $\pi_1 : x + 2y - z + 1 = 0$ e $\pi_2 : x - y + 4z - 3 = 0$.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Una curva biregolare può presentare punti in cui la torsione è nulla.

◯ Vero ◯ Falso

26. (a) Non esistono vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tali che $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| > \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, due punti distinti determinano un fascio (proprio) di piani.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Sia γ una curva biregolare rappresentata dalla funzione vettoriale definita da $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Allora, l'equazione

$$\begin{vmatrix} x - x(t) & y - y(t) & z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0$$

rappresenta il piano rettificante di γ nel pinto $f(t)$.

◯ Vero ◯ Falso

27. (a) Se $f:[-2,-1]\to\mathbb{R}$ è una funzione continua tale che $f(x)\le 2x$ per ogni $x\in[-2,-1]$, allora $\int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x \le 3$.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Il prodotto scalare di $\mathbb{R}^n$ è una forma bilineare simmetrica definita positiva.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Il centro della circonferenza osculatrice di una curva biregolare γ coincide con il centro di curvatura di γ (nello stesso punto).

◯ Vero ◯ Falso

28. (a) Se una funzione ammette una primitiva su un intervallo (a,b), allora ammette un'unica primitiva su (a,b).

◯ Vero ◯ Falso

(b) Il prodotto vettoriale di due versori è un versore.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Sia γ una curva biregolare rappresentata dalla funzione vettoriale $f:[a,b]\to\mathbb{R}^3$. Allora il vettore $f''(t)$ appartiene al piano osculatore a γ nel punto $f(t)$.

◯ Vero ◯ Falso

29. (a) Se $f(x)\le 0$ per ogni $x\in[-1,0]$, allora $\displaystyle\int_0^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0$.

◯ Vero ◯ Falso

(b) $(f(t)\wedge g(t))' = f'(t)\wedge g(t) - g'(t)\wedge f(t)$.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Se γ_1 e γ_2 sono due curve regolari di classe $\mathcal{C}^1$ su un intervallo $[a,b]$ che hanno lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale, allora $\int_{\gamma_1}\mathrm{d}s = \int_{\gamma_2}\mathrm{d}s$.

◯ Vero ◯ Falso

30. (a) Sia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(t)\ge 0$ per ogni $t\in[0,1]$. Allora la funzione integrale $F(x)=\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ è definita su tutto l'intervallo $[0,1]$ e $F(x)\ge 0$ per ogni $x\in[0,1]$.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Il piano $\pi : x-4y+2z=0$ appartiene al fascio di piani che ha come sostegno la retta

$$r:\begin{cases} x=2t \\ y=-t \\ z=-3t\,. \end{cases}$$

◯ Vero ◯ Falso

(c) La curva

$$\gamma:\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=t^2-3t^4 \\ z=t^4+2t^6 \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

è semplice

◯ Vero ◯ Falso

31. (a) $\displaystyle\int_a^b f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b)-f(a)g(a)$.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Un'equazione differenziale a variabili separabili $y' = a(x)b(y)$ ammette sempre almeno una soluzione singolare.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Una curva derivabile due volte è biregolare se e solo se ha curvatura positiva.

◯ Vero ◯ Falso

32. (a) Se y_1 e y_2 sono due soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x) + p(x)y(x) = 0$, allora anche la funzione $3y_1 + 4y_2$ è una soluzione della stessa equazione.

◯ Vero ◯ Falso

(b) I quattro punti $A \equiv (1, -1, 2)$, $B \equiv (2, 1, -1)$, $C \equiv (-1, 1, 2)$ e $D \equiv (1, 2, -1)$ giacciono su una medesima circonferenza.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Se una curva γ (di classe $\mathcal{C}^1$) viene riparametrizzata mediante il parametro arco, si ottiene una parametrizzazione equivalente.

◯ Vero ◯ Falso

33. (a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha \to +\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x \,.$$

◯ Vero ◯ Falso

(b) L'angolo tra due piani $\pi_1 \,:\, a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 \,:\, a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ è l'unico angolo $\theta \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos\theta = \frac{|\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle|}{\|\mathbf{a}_1\|\,\|\mathbf{a}_2\|}$$

dove $\mathbf{a}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\mathbf{a}_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Se $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ è la terna intrinseca di una curva biregolare parametrizzata rispetto al parametro arco, allora $\mathbf{t}'$ e $\mathbf{b}'$ sono paralleli.

◯ Vero ◯ Falso

34. (a) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, l'equazione $x^2 + y^2 = 4$ rappresenta una circonferenza.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Se f e g sono due funzioni vettoriali derivabili, allora $\langle f(t), g(t) \rangle' = \langle f'(t), g'(t) \rangle$.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Se γ è una curva di classe $\mathcal{C}^1$ chiusa, allora $\int_\gamma \mathrm{d}s = 0$.

◯ Vero ◯ Falso

35. (a) L'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge assolutamente quando l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ converge.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, la norma del vettore $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ dà l'area del triangolo individuato dai due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Se $f : (0, 1) \to \mathbb{R}^3$ è una funzione vettoriale derivabile due volte con $\|f'(t)\| = 3$ per ogni $t \in (0, 1)$, allora $f'(t) \perp f''(t)$ per ogni $t \in (0, 1)$.

◯ Vero ◯ Falso

Risposte

1. (a) Vero.
   (b) Vero.
   (c) Falso. Esiste una e una sola retta che soddisfa le condizioni richieste.
2. (a) Vero.
   (b) Vero.
   (c) Falso, Ne esistono infinite, ossia tutte le rette che passano per P e che giacciono sul piano passante per P e ortogonale ad r.
3. (a) Falso. Le somme di Cauchy-Riemann devono convergere e il loro limite deve essere indipendente dalla scelta dei punti ξ_i che intervengono nella definizione di tali somme.
   (b) Falso. Sono ortogonali se e solo se è nullo il loro prodotto scalare.
   (c) Vero.
4. (a) Vero. Infatti, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e per ogni $f, g \in \mathcal{C}^1([a,b])$, si ha $D(\lambda f + \mu g) = \lambda Df + \mu Dg$.
   (b) Falso. Affinché una funzione y sia soluzione dell'equazione $y' = F(x,y)$ deve essere derivabile.
   (c) Falso. Ne esiste esattamente una.
5. (a) Falso.
   (b) Falso.
   (c) Falso. Possono anche essere sghembe.
6. (a) Vero. Se la funzione f possedesse una primitiva, allora esisterebbe una funzione derivabile $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (a,b)$. Quindi, essendo una derivata, la funzione f dovrebbe essere continua o ammettere al più dscontinuità di seconda specie.
   (b) Falso. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
   (c) Vero.
7. (a) Vero. Per il secondo teorema fondamentale del calcolo, la funzione integrale di una funzione continua è una primitiva (di classe $\mathcal{C}^1$) della funzione di partenza. Quindi, per ogni funzione $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ esiste una funzione $F \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tale che $DF = f$, ossia l'operatore D è suriettivo.
   (b) Falso. Rappresenta un piano (parallelo all'asse z).
   (c) Vero.
8. (a) Vero, per il criterio del confronto asintotico.
   (b) Vero. Infatti $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{1+4+4} = 3$ e $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{2+3+4} = 3$.
   (c) Vero. Il piano osculatore è il piano generato dal versore tangente e dal versore normale.
9. (a) Vero. Si pensi al pennello di Peano.
   (b) Vero. Infatti, scelti due punti distinti di r, si ha il passaggio per tre punti non allineati e questo determina uno e un solo piano (che conterrà l'intera retta r).
   (c) Vero.
10. (a) Falso. Infatti, per $x \to 0$, si ha $f(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} \sim \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x}$ e la funzione $1/x$ non è integrabile in senso improprio in un intorno di 0. Quindi, per il criterio del confronto asintotico, nemmeno la funzione f è integrabile in senso improprio in un intorno di 0.
    (b) Vero.

(c) Vero.

11. (a) Falso. Si ha $a(t) = \frac{1}{1+t}$ e $b(y) = \frac{\cos(y+y^2)}{1-y}$.
    (b) Vero.
    (c) Falso. Poiché $x^2 + y^2 + z^2 = -1$, il raggio risulta immaginario.

12. (a) Falso. Si consideri, ad esempio, la funzione di Dirichlet che vale 1 sui punti razionali e vale 0 sui punti irrazionali.
    (b) Falso. Possono anche essere sghembe.
    (c) Vero.

13. (a) Falso. Funzioni che differiscono per una costante additiva hanno la stessa derivata.
    (b) Vero.
    (c) Vero.

14. (a) Vero.
    (b) Vero. L'equazione differenziale data è a variabili separabili con $a(x) = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^x}$ e $b(y) = \frac{(1+y^2)\,\mathrm{e}^y}{1+y^6}$. Poiché la funzione a è continua in un intorno di $x_0 = 0$ e la funzione b è di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di $y_0 = 0$, sono soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale della soluzione del problema di Cauchy.
    (c) Vero. Gli integrali di linea (di prima specie) non cambiano se a una parametrizzazione della curva si sostituisce una parametrizzazione equivalente.

15. (a) Vero. Una funzione derivabile è continua e ogni funzione continua è integrabile.
    (b) Falso. Ne esiste esattamente uno.
    (c) Falso. Ad esempio, la curva rappresentata dalla funzione vettoriale $f(t) = (t^2, t^3, t^4)$ è semplice, poiché la seconda componente è iniettiva, ma non è regolare essendo $f'(t) = (2t, 3t^2, 4t^3)$ e quindi $f'(0) = (0, 0, 0)$.

16. (a) Vero. Se y è una soluzione dell'equazione differenziale data, allora y è derivabile su (a, b) e quindi è continua su (a, b) . Di conseguenza, essendo $y'(x) = p(x)y(x) + q(x)$, si ha che anche y' è continua su (a, b) . Quindi y è di classe $\mathcal{C}^1$ su (a, b) .
    (b) Vero. Sono i piani del fascio che ha come sostegno la retta che passa per il punto P ed è ortogonale al π .
    (c) Falso. Una curva è gobba quando non è piana.

17. (a) Falso.
    (b) Falso. Si ha $\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. Quindi $\theta = \frac{\pi}{3}$.
    (c) Falso. Ne esistono infinite.

18. (a) Vero.
    (b) Falso. Afferma che $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}\| = \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$.
    (c) Vero.

19. (a) Vero. Infatti la funzione e^{-x} è sempre positiva e non è infinitesima per $x \to -\infty$.
    (b) Falso. Un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale è un'equazione del tipo $y' = F(x, y)$.
    (c) Falso. È un numero reale qualsiasi, anche negativo.

20. (a) Falso. Ad esempio, la funzione $1/x$ è continua e positiva su $[1, +\infty)$ ed è infinitesima per $x \to +\infty$, ma l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$ diverge.
    (b) Falso. La funzione $y(x) = \sqrt{x}$ non è derivabile in $x = 0$. Pertanto è soluzione dell'equazione data solo sull'intervallo $(0, +\infty)$.

(c) Falso. L'angolo tra due vettori è, per definizione, l'angolo $\theta \in [0, \pi]$ che essi formano, mentre $\theta = \frac{5}{4}\pi \in (\pi, 2\pi)$.

21. (a) Vero.
    (b) Vero.
    (c) Falso. Giace sul suo piano osculatore (che è costante).

22. (a) Vero. Infatti si ha $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$, e la funzione $\frac{1}{x^2}$ è integrabile in senso improprio per $x \to +\infty$. Quindi, essendo f continua e positiva, per il criterio del confronto asintotico anche la funzione f è integrabile in senso improprio per $x \to +\infty$.
    (b) Falso. Due rette sono sghembe quando non esiste alcun piano che le contenga.
    (c) Vero.

23. (a) Falso. Una funzione continua a tratti è integrabile, ma non è necessariamente continua.
    (b) Vero.
    (c) Vero. Il punto O si ottiene almeno per due valori distinti del parametro, ossia per $t = -1/2$ e per $t = -1/3$.

24. (a) Vero.
    (b) Falso. Gli equatori di una sfera sono tutte le circonferenze che si ottengono intersecando la sfera con un piano passante per il centro della sfera stessa.
    (c) Falso. In una curva biregolare la curvatura è sempre positiva.

25. (a) Vero, per il criterio del confronto sia per $x \to 0^+$ sia per $x \to +\infty$.
    (b) Vero. Infatti, l'equazione di π si può ottenere come combinazione lineare delle equazioni di π_1 e di π_2. Più precisamente, l'equazione di π si ottiene dalla somma delle equazioni di π_1 e π_2.
    (c) Vero. La torsione può anche essere negativa.

26. (a) Vero. Per la disuguaglianza triangolare si ha $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
    (b) Vero. Due punti distinti determinano esattamente una retta che, a sua volta, determina un fascio (proprio) di piani.
    (c) Falso. Rappresenta il piano osculatore.

27. (a) Vero. Infatti, per la proprietà di monotonia dell'integrale definito si ha

$$\int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{-2}^{-1} 2x\,\mathrm{d}x = [x^2]_{-2}^{-1} = 3\,.$$

    (b) Vero.
    (c) Vero.

28. (a) Falso. Ne ammette infinite.
    (b) Falso. Il prodotto vettoriale di due versori è un versore se e solo se i due versori sono ortogonali.
    (c) Vero. Poiché il versore binormale è $\mathbf{b} = \frac{f'(t) \wedge f''(t)}{\|f'(t) \wedge f''(t)\|}$, si ha che $f''(t) \perp \mathbf{b}$, ossia si ha che $f''(t)$ appartiene al piano osculatore a γ nel punto $f(t)$.

29. (a) Vero. Per la proprietà di monotonia degli integrali definiti, si ha $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$. Pertanto $\int_{0}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.
    (b) Vero. Poiché vale la regola di Leibniz per il prodotto vettoriale di funzioni vettoriali e il prodotto vettoriale è antisimmetrico, si ha $(f(t) \wedge g(t))' = f'(t) \wedge g(t) + f(t) \wedge g'(t) = f'(t) \wedge g(t) - g'(t) \wedge f(t)$.
    (c) Falso. Le due curve possono avere lunghezza diversa.

30. (a) Falso. Comunque fissato $x \in [0,1]$, si ha $f(t) \geq 0$ per ogni $t \in [x,1]$. Quindi, per la proprietà di monotonia, si ha $\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$, ossia $\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq 0$, ossia $F(x) \leq 0$.

(b) Vero. Infatti, si ha $2t - 4(-t) + 2(-3t) = 2t + 4t - 6t = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, ossia $r \subseteq \pi$, ossia $\pi \in \Phi_r$.

(c) Falso. Ad esempio, per $t = \pm 1$ si ha sempre il punto $P \equiv (2, -2, 3)$.

31. (a) Falso. Ad esempio, per $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$, si ha $\int_0^1 f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 6x^3\,\mathrm{d}x = [\frac{3}{2}\,x^4]_0^1 = \frac{3}{2}$ e $f(b)g(b) - f(a)g(a) = 1 - 0 = 1$.

(b) Falso. Se $b(y) = 1 + y^2$, non ci sono soluzioni singolari poiché l'equazione $1 + y^2 = 0$ non ha soluzioni reali.

(c) Vero. Una curva γ rappresentata da una funzione vettoriale $f : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ è biregolare quando è derivable due volte e $f'(t) \wedge f''(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in (a,b)$. Poiché la curvatura è data da $\kappa(t) = \frac{\|f'(t) \wedge f''(t)\|}{\|f'(t)\|^3}$, la curva γ ha curvatura $\kappa(t) \neq 0$ per ogni $t \in (a,b)$. Poiché la curvatura non è mai negativa, questo significa che deve essere sempre positiva.

32. (a) Vero. L'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea è chiuso rispetto alle combinazioni lineari.

(b) Vero. Poiché i quattro punti dati hanno le stesse coordinate a meno dell'ordine, essi giacciono sulla circonferenza

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 2\,. \end{cases}$$

(c) Vero.

33. (a) Falso. La funzione x non è integrabile né a $+\infty$ né a $-\infty$ non essendo infinitesima né per $x \to +\infty$ né per $x \to -\infty$. Tuttavia, se usassimo la definizione data, si avrebbe

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha \to +\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} x\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha \to +\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\alpha}^{\alpha} = \lim_{\alpha \to +\infty} \left[\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\right] = 0\,.$$

La definizione corretta è la seguente. Fissato un punto qualsiasi di $\mathbb{R}$, ad esempio $x = 0$, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\beta \to +\infty} \int_{0}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(b) Vero. L'angolo tra due piani coincide con l'angolo tra le direzioni ortogonali ai due piani dati. Poiché $\mathbf{a}_1$ è un vettore ortogonale al piano π_1 e $\mathbf{a}_2$ è un vettore ortogonale al piano π_2, si ha la proprietà enunciata.

(c) Vero. Per le formula di Frenet-Serret, si ha $\mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}$. Quindi $\mathbf{t}'$ e $\mathbf{b}'$ sono paralleli.

34. (a) Falso. Rappresenta un cilindro circolare retto.

(b) Falso. Vale la regola di Leibniz per il prodotto scalare: $\langle f(t), g(t)\rangle' = \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle$.

(c) Falso. L'integrale $\int_\gamma \mathrm{d}s$ dà la lunghezza della curva γ.

35. (a) Vero.

(b) Falso. Dà l'area del parallelogrammo individuato dai due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

(c) Vero.