1. (a) $\ln \dfrac{3}{2} = \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (b) Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$, si ha $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (c) Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $\mathrm{e}^{x^2} = (\mathrm{e}^x)^2$.

   ◯ Vero ◯ Falso

2. (a) Se $\dfrac{a}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\, b$, allora $a = b$.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (b) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, si ha $x^\alpha + x^{2\alpha} = x^\alpha(1 + x^2)$.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (c) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, si ha $x^\alpha + x^{2\alpha} \sim x^\alpha$ per $x \to 0^+$.

   ◯ Vero ◯ Falso

3. (a) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\sqrt{n}$ è un numero irrazionale.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (b) Se $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile pari, allora $f' : (-a, a) \to \mathbb{R}$ è una funzione dispari.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (c) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, esiste esattamente una retta passante per tre punti distinti.

   ◯ Vero ◯ Falso

4. (a) Un sottoinsieme non vuoto finito di $\mathbb{R}$ ammette sempre massimo e minimo.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (b) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \mathrm{e}^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, è uguale alla funzione $g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, definita da $f(x) = \mathrm{e}^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (c) Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, positiva, asintoticamente equivalente alla funzione $x^{-5/4}$ per $x \to +\infty$. Allora l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ è convergente.

   ◯ Vero ◯ Falso

5. (a) Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $\sqrt{x^2} = x$.

   ◯ Vero ◯ Falso

   (b) Siano a_n e b_n due successioni tali che $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$. Allora a_n e b_n sono due successioni regolari.

   ◯ Vero ◯ Falso

(c) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, esistono infinite rette sghembe a una retta data.

◯ Vero ◯ Falso

6. (a) La forma esponenziale di un numero complesso z è $z = \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, dove $\rho = |z|^2$ e $\theta = \arg z$.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile due volte con sviluppo di Taylor in $x_0 = 2$ dato da $f(x) = 1 + 3(x-2)^2 + o((x-2)^2)$, allora $f'(2) = 0$.

◯ Vero ◯ Falso

(c) I tre punti $A \equiv (1,1,1)$, $B \equiv (2,2,2)$ e $C \equiv (3,3,3)$ sono allineati.

◯ Vero ◯ Falso

7. (a) Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, si ha $\ln x^2 = 2 \ln x$.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione strettamente monotona, allora è iniettiva.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Se f è una funzione derivabile, allora la derivata prima di $f(x^4)$ è $f'(4x^3)$.

◯ Vero ◯ Falso

8. (a) Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\displaystyle\int_0^x (1+t^2)\, \mathrm{e}^{t^2}\, \mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^x (1+t+t^2)\, \mathrm{e}^{t^2}\, \mathrm{d}t} = 1 .$$

◯ Vero ◯ Falso

(b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile due volte con sviluppo di Taylor in $x_0 = 2$ dato da $f(x) = 1 + 3(x-2)^2 + o((x-2)^2)$, allora $f''(2) = 6$.

◯ Vero ◯ Falso

(c) La massa di una curva regolare γ di classe $\mathcal{C}^1$, con densità lineare di massa δ, è $M = \int_\gamma \delta^2 \, \mathrm{d}s$.

◯ Vero ◯ Falso

9. (a) Se $f : (a,b) \to (c,d)$ è una funzione invertibile strettamente crescente, allora la funzione inversa $\widehat{f} : (c,d) \to (a,b)$ è strettamente decrescente.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, si ha $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

◯ Vero ◯ Falso

(c) La retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 5t \end{cases}$$

è ortogonale al piano $\pi \ : \ 2x + 4y - 10z + 1 = 0$.

◯ Vero ◯ Falso

10. (a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzioni dispari, allora $f(0) = 0$.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Se $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile, allora $\operatorname{Im} f$ è un intervallo.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Il momento di inerzia rispetto all'asse z di una curva regolare γ di classe $\mathcal{C}^1$, con densità lineare di massa δ, è $I_z = \int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\,\delta\,\mathrm{d}s$.

◯ Vero ◯ Falso

11. (a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$, allora $f(a_n) \sim f(b_n)$ per $n \to +\infty$.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^n$, allora f ammette uno sviluppo di Taylor di ordine n in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Se $\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}\}$ è la terna intrinseca di una curva biregolare γ, allora $\mathbf{n} \wedge \mathbf{t} = -\mathbf{b}$.

◯ Vero ◯ Falso

12. (a) Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, si ha $(\sqrt{x})^2 = x$.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Per ogni $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, se $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, allora il vettore $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \wedge \mathbf{z}$ appartiene al piano generato dai vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Sia γ una curva piana regolare di classe $\mathcal{C}^1$ e sia $F : A \to \mathbb{R}^2$ una funzione continua positiva definita in un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ contenente γ. Allora l'integrale di linea $\int_\gamma F\,\mathrm{d}s$ dà l'area della superficie cilindrica $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in \gamma,\ 0 \leq z \leq F(x,y)\}$.

◯ Vero ◯ Falso

13. (a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a,b]$. Allora la funzione f non ammette massimi nè minimi sull'intervallo $[a,b]$.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Se $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'(x) + p(x)y(x) = 0$ è

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} + c \qquad c \in \mathbb{R}.$$

◯ Vero ◯ Falso

(c) La lunghezza del grafico di una funzione derivabile $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

◯ Vero ◯ Falso

14. (a) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \operatorname{artg} x$, è invertibile.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Si ha $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, una curva (biregolare) con curvatura costante è necessariamente una circonferenza.

◯ Vero ◯ Falso

15. (a) Se f e g sono due funzioni convergenti per $x \to x_0$, allora anche la funzione $3f^2 - 4fg + 6g^2$ è convergente per $x \to x_0$.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua positiva tale che $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$, allora $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Nello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, una circonferenza è univocamente determinata dal centro, dal raggio e dal piano su cui giace.

◯ Vero ◯ Falso

16. (a) Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo chiuso e limitato è sempre limitata.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Il prodotto di due funzioni integrabili in senso improprio sull'intervallo $(0, 1]$ è ancora una funzione integrabile in senso improprio sullo stesso intervallo.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Sia γ una curva parametrizzata da una funzione vettoriale $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, definita da $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. Se γ è semplice, allora le funzioni componenti f_1, f_2 ed f_3 sono tutte e tre iniettive.

◯ Vero ◯ Falso

17. (a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora anche la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $F(x) = f(x) \sin f(x) + \operatorname{artg} f(x)$, è continua.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Se $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{0}$ e $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, allora $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Sia γ una curva parametrizzata da una funzione vettoriale $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, definita da $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. Se γ è semplice, allora almeno una delle funzioni componenti f_1, f_2 ed f_3 è iniettiva.

◯ Vero ◯ Falso

18. (a) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione che ammette minimo m e massimo M. Allora $f(x) \in [m, M]$, per ogni $x \in [a, b]$, solo se f è continua.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile due volte con sviluppo di Taylor in $x_0 = 2$ dato da $f(x) = 1 + 3(x-2)^2 + o((x-2)^2)$, allora f presenta un minimo in $x_0 = 2$.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Una curva regolare è semplice.

◯ Vero ◯ Falso

19. (a) La retta tangente al grafico della funzione e^x per $x = 0$ ha equazione $y = x + 1$.

◯ Vero ◯ Falso

(b) L'immagine della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da e^{-x^2} è $(0, 1]$.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Se y_1 e y_2 sono due soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x) + y(x) = x^2$, allora $y_1 + y_2$ è anch'essa una soluzione della stessa equazione.

◯ Vero ◯ Falso

20. (a) Se f è una funzione derivabile, allora la derivata prima di $\operatorname{artg} f(x)$ è $\frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile tre volte con sviluppo di Taylor in $x_0 = 1$ dato da $f(x) = 1 + (x-1)^3 + o((x-1)^3)$, allora, in $x_0 = 1$, f presenta un flesso ascendente a tangente orizzontale.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Se $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua positiva tale che $f(t) \sim \frac{1}{t\sqrt{t}}$ per $t \to +\infty$, allora la funzione integrale $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definita da $F(x) = \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$, ammette un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

◯ Vero ◯ Falso

21. (a) La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ è derivabile in $x = 0$.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Le funzioni $f(x) = x^5 + 2x^3$ e $g(x) = x^2 - 3$ soddisfano le ipotesi del teorema di Cauchy relativamente all'intervallo $[-1, 1]$,

◯ Vero ◯ Falso

(c) I piani $\pi_1 : x + 2y - z + 4 = 0$ e $\pi_2 : 3x + 6y - 3z - 1 = 0$ sono paralleli.

◯ Vero ◯ Falso

22. (a) La retta tangente al grafico della funzione $F(x) = \int_0^x \cos\sqrt{\pi^2 + t^2}\ \mathrm{d}t$ per $x = 0$ ha equazione $y = -x$.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se f non è integrabile in senso improprio sull'intervallo $[1, +\infty)$, allora anche $|f|$ non lo è.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Le rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

sono ortogonali.

◯ Vero ◯ Falso

Risposte

1. (a) Falso.
   (b) Falso.
   (c) Falso.

2. (a) Falso. Si ha $a = 3b$.
   (b) Falso. Si ha $x^\alpha + x^{2\alpha} = x^\alpha(1 + x^\alpha)$.
   (c) Vero. Infatti, si ha
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha + x^{2\alpha}}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} (1 + x^\alpha) = 1\,.$$

3. (a) Falso. Ad esempio, $\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}$.
   (b) Vero.
   (c) Falso. Se i tre punti non sono allineati, non esiste alcuna retta passante per tali punti.

4. (a) Vero.
   (b) Falso. Due funzioni sono uguali quando hanno lo stesso dominio, lo stesso codominio e la stessa legge. In questo caso, il codominio è diverso. Inoltre, g è suriettiva, mentre f non lo è.
   (c) Vero. Per il criterio del confronto asintotico e per il fatto che la funzione $x^{-5/4} = \frac{1}{x^{5/4}}$, con $\alpha = 5/4 > 1$, è integrabile in senso generalizzato per $x \to +\infty$.

5. (a) Falso. Si ha $\sqrt{x^2} = |x|$.
   (b) Falso. Le successioni $a_n = (-1)^n(n+1)$ e $b_n = (-1)^n(n+2)$ non sono regolari, ma sono asintoticamente equivalenti per $n \to +\infty$, poiché
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(-1)^n(n+2)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1\,.$$
   (c) Vero. Ad esempio, tutte le rette ortogonali non incidenti.

6. (a) Falso. Si deve avere $\rho = |z|$.
   (b) Vero. $f'(2)$ è il coefficiente di $x - 2$ nello sviluppo di Taylor.
   (c) Vero. Appartengono tutti alla retta di equazioni parametriche $x = t$, $y = t$, $z = t$.

7. (a) Falso. L'identità è vera solo per $x > 0$. In generale, si ha $\ln x^2 = 2 \ln |x|$.
   (b) Vero.
   (c) Falso. La derivata prima di $f(x^4)$ è $4x^3 f'(x^4)$.

8. (a) Vero. Infatti, applicando la regola di De L'Hôpital, si ha
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\displaystyle\int_0^x (1+t^2)\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^x (1+t+t^2)\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(1+x^2)\,\mathrm{e}^{x^2}}{(1+x+x^2)\,\mathrm{e}^{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+x^2}{1+x+x^2} = 1\,.$$
   (b) Vero. $f''(2)$ è il coefficiente di $\frac{(x-2)^2}{2}$ nello sviluppo di Taylor.
   (c) Falso. È $M = \int_\gamma \delta\,\mathrm{d}s$.

9. (a) Falso. Ad esempio, se $f(x) = \mathrm{e}^x$, allora $\widehat{f}(x) = \ln x$ ed entrambe le funzioni sono strettamente crescenti. In generale, se f è strettamente crescente, anche $\widehat{f}$ è strettamente crescente.
   (b) Vero. Il prodotto vettoriale è antisimmetrico.

(c) Vero. I parametri direttori di r sono $(1:2:-5)$ e i parametri direttori della direzione ortogonale a π sono $(2:4:-10)=(1:2:-5)$.

10. (a) Vero. Infatti $f(0)=f(-0)=-f(0)$, da cui $f(0)=0$.

    (b) Vero. La funzione f è continua (essendo derivabile) e le funzioni continue trasformano intervalli in intervalli.

    (c) Falso. È $I_z=\int_\gamma (x^2+y^2)\,\delta\,\mathrm{d}s$.

11. (a) Falso. Ad esempio, per $f(x)=\mathrm{e}^x$, $a_n=n+1$ e $b_n=n$, si ha $a_n\sim b_n$ per $n\to+\infty$, ma $f(a_n)\not\sim f(b_n)$ per $n\to+\infty$, essendo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(a_n)}{f(b_n)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^n}=\mathrm{e}\neq 1\,.$$

    (b) Vero.

    (c) Vero.

12. (a) Vero.

    (b) Vero. Poiché $\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$, i due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ generano un piano π di normale $\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}$. Quindi, poiché il vettore $(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})\wedge\mathbf{z}$ è ortogonale al vettore $\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}$, il vettore $(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})\wedge\mathbf{z}$ appartiene al piano π.

    (c) Vero.

13. (a) Falso. Poiché è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, la funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}$ e, in particolare, è continua sull'intervallo $[a,b]$. Pertanto, per il teorema di Weierstrass, la funzione f (continua su un intervallo chiuso e limitato) ammette massimo e minimo sull'intervallo $[a,b]$. Poicé la derivata prima non si annulla mai, la funzione f assumerà il valore massimo e il valore minimo agli estremi dell'intervallo, ossia per $x=a$ e per $x=b$.

    (b) Falso. Si ha $y(x)=c\cdot\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$, con $c\in\mathbb{R}$.

    (c) Vero.

14. (a) Falso. La funzione f non è suriettiva, poiché $\operatorname{Im} f=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

    (b) Vero. Si tratta di un integrale gaussiano.

    (c) Falso. L'elica cilindrica è una curva biregolare e ha curvatura costante.

15. (a) Vero. La somma e il prodotto di funzioni convergenti sono ancora funzioni convergenti.

    (b) Falso. Gli integrali $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ e $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ hanno lo stesso carattere (ossia convergono o divergono entrambi), ma non è detto che siano uguali. In questo caso, gli integrali convergono.

    (c) Vero.

16. (a) Falso. Ad esempio, la funzione $f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}$, definita da

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg} x & \text{per } x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\ 0 & \text{per } x=-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

    non è limitata (e non è continua). Se f fosse continua, il problema non si porrebbe.

    (b) Falso. Ad esempio, la funzione $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile sull'intervallo $(0,1]$, ma la funzione $f(x)^2=\frac{1}{x}$ non lo è.

    (c) Falso. Ad esempio, la cubica gobba è una curva semplice con $f(t)=(t,t^2,t^3)$, $t\in\mathbb{R}$, dove la seconda funzione componente non è iniettiva.

17. (a) Vero. La somma, il prodotto e la composizione di funzioni continue sono sempre funzioni continue.

(b) Vero. Se $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{0}$, allora i due vettori sono paralleli, ossia esiste uno scalare $k \in \mathbb{R}$, tale che $\mathbf{y} = k\mathbf{x}$. Se $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, allora $\langle \mathbf{x}, k\mathbf{x} \rangle = 0$, ossia $k\|\mathbf{x}\|^2 = 0$. Pertanto, si ha $k = 0$, ossia $\mathbf{y} = 0\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, oppure si ha $\|\mathbf{x}\|^2 = 0$, ossia $\|\mathbf{x}\| = 0$, ossia $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Questo significa che due vettori non nulli non possono essere contemporaneamente paralleli e ortogonali.

(c) Falso. La circonferenza $f(\theta) = (r\cos\theta, \sin\theta, 0)$, con $\theta \in [0, 2\pi)$, è una curva semplice, ma nessuna delle funzioni componenti è iniettiva.

18. (a) Falso. L'immagine di un elemento è sempre compresa tra il valore minimo e il valore massimo.

(b) Vero. Infatti, si ha $f'(2) = 0$ e $f''(2) = 6 > 0$.

(c) Falso. Si consideri, ad esempio, il *folium* di Cartesio.

19. (a) Vero.

(b) Vero. Si tratta di una funzione gaussiana.

(c) Falso. L'equazione differenziale data è lineare, ma non è omogenea.

20. (a) Vero.

(b) Vero. Infatti $f'(1) = f''(1) = 0$ e $f'''(1) = 6 > 0$.

(c) Vero. Infatti, si ha

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

e tale integrale converge.

21. (a) Falso. Si ha $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, con $x \neq 0$.

(b) Falso. Le funzioni f e g sono continue su $[-1, 1]$ e derivabili si $(-1, 1)$, ma $g'(x) = 2x$ si annulla in un punto interno a $(-1, 1)$.

(c) Vero.

22. (a) Vero. Infatti, si ha $F(0) = 0$, $F'(x) = \cos\sqrt{\pi^2 + x^2}$ e dunque $F'(0) = \cos\pi = -1$. Quindi, l'equazione della retta tangente è $y = F(0) + F'(0)(x - 0)$, ossia $y = -x$.

(b) Vero. Infatti, se $|f|$ fosse integrabile in senso improprio sull'intervallo $[1, +\infty)$, allora lo sarebbe anche f per il criterio della convergenza assoluta.

(c) Vero. I vettori direttori di r_1 e r_2 sono rispettivamente $\mathbf{a}_1 = (2, -1, -2)$ e $\mathbf{a}_2 = (1, -4, 3)$ e $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = 2 + 4 - 6 = 0$.