

Logaritmi

Definizione 1 Siano $b, x \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$. Il logaritmo in base a di x , indicato con $\log_a x$, è il numero reale y tale che $x = b^y$. In altre parole

$$\log_b x = y \iff x = b^y$$

Il logaritmo naturale, o neperiano, di x , indicato con $\ln x$, è il logaritmo in base e di x , ossia $\ln x := \log_e x$.

Definizione 2 La funzione logaritmo di base b è la funzione $\log_b(-) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ che ad ogni numero reale positivo x associa $\log_a x$.

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \quad (x, y > 0)$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (x, y > 0)$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \quad (x > 0, \alpha \in \mathbb{R})$$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x \quad (x > 0, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$$

$$\log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \log_a x \quad (x > 0, \alpha \in \mathbb{R})$$

$$\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$$

$$\log_{ab} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x}}, \quad \log_{\frac{a}{b}} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_a x} - \frac{1}{\log_b x}}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_c b \cdot \log_a c$$

$$\frac{d}{dx} \log_b x = \frac{1}{\ln b} \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$